Lec 32 任意项级数

定义 32.1 (绝对收敛与条件收敛)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个级数, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛; 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

♣

命题 32.1

若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\forall m > 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^m$ 收敛.

♠

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 有界 $\Rightarrow a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^m$ 有界 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^m$ 收敛.

32.1 例题

例 32.1 判断下列级数的敛散性:($\alpha > 0$ 为常数)

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$;
2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^{1+\alpha}}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\lambda n}{n+1}\right)^n, \lambda > 0$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+4)}}$.

证明

1. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. 当 $\alpha > 1$ 时, 收敛; 当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时, 发散.
2. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln\ln 3}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}t$. 当 $\alpha > 0$ 时, 收敛; 当 $\alpha \leqslant 0$ 时, 发散.
3. $\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \dfrac{1}{n^2}$, 故收敛.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda n}{n+1} = \lambda$. 当 $\lambda < 1$ 时, 收敛; 当 $\lambda \geqslant 1$ 时, 发散. 当 $\lambda = 1$ 时,$a_n =$

$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1} \neq 0$. 故发散.

5. 比值法: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = 0$. 故收敛.
6. $\dfrac{n+5}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+4)}} \sim \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 故收敛.

32.2 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的 Leibniz 判别法

定理 32.1 (Leibniz 判别法)

设 $\{a_n\}$ 递减趋于零, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

例 32.2 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 是交错级数, 且 $a_n=\frac{1}{n}$ 递减趋于零, 故收敛. 而且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是条件收敛的.

推论 32.1

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\lambda}$, $\lambda>1$ 的时候绝对收敛, $0<\lambda\leqslant 1$ 的时候条件收敛.

32.3 重排定理

定理 32.2 (绝对收敛的重排定理)

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则任意改变项和顺序后所得的新级数仍收敛, 并且其和不变.

证明 设

$$a_n^+ = \frac{|a_n|+a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n|-a_n}{2},$$

即,

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geqslant 0, \\ 0, & a_n > 0, \\ -a_n, & a_n \leqslant 0. \end{cases}$$

因此由 a_n^+ 构成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 是正项级数, 并且满足

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^- > a_n^+, \quad a_n = a_n^+ - a_n^-,$$

根据比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 都收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的求和顺序改变时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 的求和顺序作相同的改变,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的求和顺序作相同的改变, 因而前者的收敛性和收敛值也不会变.

推论 32.2

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛. 但如果级数是条件收敛的, 则两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都发散到 $+\infty$.

证明 第一个结论是显然的. 对于第二个结论, 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

中三个级数不可能有两个收敛. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 只可能都发散.

定理 32.3 (Riemann 重排定理)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则适当改变求和的顺序可以使新级数收敛于给定的任意实数, 也可以使新级数发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$.

证明 设 A 是任意（有限）实数, 不妨设 $A > 0$. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 是级数的非负项构成的级数, 它发散到 $+\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 是级数的负项构成的级数, 它发散到 $-\infty$. 我们这样确定重排：先放置

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1}$$

使得此和超过 A, 再放置

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_{n_1}$$

直到整个部分和又刚小于 A, 如继续下去, 上述每一步都是可行的, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 和

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

都是发散的, 增加若干项 p_n 总会使和式刚好大于 A. 增加若干项负的 q_n 总会使和式刚好小于 A.

又因为 $a_n \to 0$, 所以 $p_n \to 0, q_n \to 0$, 而重排后的级数的部分和与 A 的差的绝对值始终小于数列 $\{p_n\}$ 的某一项, 或小于数列 $\{q_n\}$ 的某一项, 故这样得到的重排级数收敛于 A.

为了使重排后的级数发散的 $+\infty$, 我们这样安排：先放置

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1}$$

使其大于 1, 接着放一项 q_1, 然后接在后面放置

$$p_{m_1+1} + \cdots + p_{m_2}$$

使整个部分和大于 2, 接着放一项 q_2, 继续下去, 第 n 次放置正项和一个负项后, 整个部分和大于 $n - q_n$. 于是重排的级数发散到 $+\infty$.

✍ **作业** ex7.1:2(8)(12)(14)(15)(16),3,11,12(3)(5)(7),13.